A-3 Kolmogorov Complexityとフラクタル集合(基礎物理学研究所研究会「複雑系6」報告,研究会報告)

只木, 孝太郎

Kolmogorov Complexity とフラクタル集合

北海道大学 理学部　只木 孝太郎 [1]

1 まえがき

00, 11 を無限個並べて得られる無限列を考える。例えば、$x = 00110011110011\ldots\ldots$ である。この無限列 x の左端に 0. を付けて、$0.x = 0.00110011110011\ldots\ldots$ とし、これを二進表示の実数とみなし、無限列 x とこの実数とを同一視する。そして、このような実数からなる集合を F とおく。

F の Hausdorff 次元を求めると、1/2 であることがわかる。

また、F に属する任意の列 x をアルゴリズム的に圧縮することを考えると、x を構成する 00 と 11 のそれぞれの重複を除くことにより、少なくとも半分には圧縮できることがわかる。しかし、アルゴリズム的にそれ以上圧縮できないランダム列が存在するので、もし x の圧縮後の列がランダム列であった場合、x は 1/2 よりも圧縮することは不可能である。よって、F に属する列のアルゴリズム的な圧縮率の最大値は 1/2 である。

従って、等式 (F の Hausdorff 次元) = (F の元の圧縮率の最大値) が成り立つ。上で考えたような特殊な F に限らず、もっと一般のどのようなクラスの F について、この等式が成り立つのか、問題となるところである。本報告の前半では、ある意味で計算可能な自己相似集合に対して、この等式が成り立つことを示す。

さて、0, 1 の有限列 s の Kolmogorov complexity は、optimal な部分帰納関数 U について、$U(p) = s$ となる 0, 1 の有限列 p の長さの最小値として定義される。その際、U の定義域を prefix-free set とする場合と、そうしない場合とがある。前者の場合での s の Kolmogorov complexity を $K(s)$ で表し、後者を場合でのそれを $K'(s)$ で表すことにする。

我々は $K(s)$ を用いて、Kolmogorov complexity と Hausdorff 次元との関係を調べる。

Kolmogorov complexity と、次元やエントロピーを関連付ける研究は、昔からあるが (例えば [2]、[11])、それらでは、$K'(s)$ を用いて議論している。[11] では、0, 1 の無限列の集合 F に対し、F の各元 x について、その圧縮率に関連する $\limsup_{n\to\infty} K'(x_n)/n$ や $\liminf_{n\to\infty} K'(x_n)/n$ を考え、F におけるそれらの上限もしくは最大値と、F の Hausdorff 次元との関係を論じている。$K(s)$ と $K'(s)$ の差は $\log|s|$ 程度なので、圧縮率を扱っている限りにおいては、$K(s)$ で考えても同じ結論が得られる。

ところで、Martin-Löf の意味でランダムな無限列の圧縮率は 1 であるが、圧縮率が 1 の無限列は必ずしもランダムではない。圧縮率ではランダム性を捉えることはできないので

[1]E-mail: tadaki@math.sci.hokudai.ac.jp

ある。そして、$K'(s)$ よりも $K(s)$ を用いた方が、ランダム性を自然に特徴付けることができる。言い換えると、$K(s)$ を用いることにより、圧縮率が 1 の無限列を、ランダム性に関連させて分類することが可能になるのである。圧縮率が 1 より小さい無限列についても同様であり、$K(s)$ を用いることにより、同じ圧縮率を持つ無限列を、更にいくつかのクラスに分類することが可能になり、より強い主張をすることが可能になる。従って、本報告の前半は、[11] の結果の一般化になっている。

Chaitin の停止確率 Ω は次式で定義される。

$$\Omega \equiv \sum_{U(p) \text{ is defined}} 2^{-|p|} \tag{1}$$

ただし、上式での和は、U の定義域に属するあらゆる p についての和である。Chaitin の停止確率 Ω は、$K(s)$ を用いる立場で成り立つ概念であり、その二進展開は、ランダムな無限列の実例になっている。本報告の後半で、我々は Chaitin の停止確率 Ω を一般化した Ω^D を導入する。そして、Ω^D の性質を用いて、U の定義域に関係した自己相似集合の Hausdorff 次元が 1 であることを示す。なお、$K'(s)$ を用いる立場では、Ω は無限大に発散し、意味を持たない。

2 準備

$0,1$ からなる有限列全体の集合を X で表す。X の元 s の長さを $|s|$ で表す。X の部分集合 S が prefix-free であるとは、S の任意の異なる 2 つの元に対し、一方が他方の接頭語にならないことを言う。$0,1$ からなる片側無限列全体の集合を X^∞ で表す。X^∞ の元 α の最初の $n$bit を α_n で表す。

$\mathbf{R}^N$ の点 $x = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$ を、次のような X^∞ の元に対応付け、これを同じ x で表す。

$$x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^N x_2^1 x_2^2 \ldots x_2^N x_3^1 x_3^2 \ldots x_3^N \ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

ここで、x_j^i は、x^i を 0 が無限個現れるように二進展開したときの小数点以下第 j 位である。

X から X への部分帰納関数 $C\colon X \to X$ の定義域を $\mathrm{dom}\, C$ で表す。$\mathrm{dom}\, C$ が prefix-free な任意の部分帰納関数 $C\colon X \to X$ と、X の元 s に対して、

$$K_C(s) \equiv \min \{\, |p| \mid p \in X \ \&\ C(p) = s \,\} \tag{3}$$

と定義する。このとき、ある特別な U があって、任意の C に対し、ある自然数 $\mathrm{sim}(C)$ が存在し、任意の $s \in X$ に対し、$K_U(s) \le K_C(s) + \mathrm{sim}(C)$ が成り立つ。このような U を一つ選んでそれに固定し、$K(s) \equiv K_U(s)$ と定義する。$K(s)$ は、s の algorithmic information content もしくは Kolmogorov complexity と呼ばれる量である。([3] 参照)

実数 D が計算可能であるとは、$\mathbf{N}^+$ から $\{0,1\}$ へのある全帰納関数 f が存在して、$0.f(1)f(2)f(3)f(4)\ldots\ldots$ が $D-\lfloor D\rfloor$ の二進展開になることを言う。

D 次元 Hausdorff 測度を $\mathcal{H}^D$ で表す。$\mathbf{R}^N$ の部分集合 F に対し、F の Hausdorff 次元を $\dim_H F$ で表す。更に、F が有界のとき、F の box-counting dimension と F の upper box-counting dimension を、それぞれ $\dim_B F$ と $\overline{\dim}_B F$ とで表す。$\dim_B F$ が存在すれば、それは $\overline{\dim}_B F$ に等しい。一般に、有界集合 F に対して、$\dim_H F \leq \overline{\dim}_B F$ が成り立つ。([7] 参照)

3 アルゴリズム次元

定義 3.1. (アルゴリズム次元) $\mathbf{R}^N$ の部分集合 F に対し、次の二式を満たす実数 D を、F のアルゴリズム次元 (algorithmic dimension) と呼び、$\dim_A F$ で表す。

$$\forall x \in F \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad K(x_n) \leq \frac{D}{N}n + o(n), \tag{4}$$

$$\exists x \in F \quad \lim_{n\to\infty} K(x_n) - \frac{D}{N}n = \infty. \tag{5}$$

ここで、x_n は、$\mathbf{R}^N$ の点 x を上記の対応付けに従い X^∞ の元とみたときの最初の $n$bit である。□

$\dim_A F$ の存在は自明ではないが、存在すれば一意であることはすぐにわかる。そして、$\dim_A F$ が存在すれば、

$$\dim_A F = \max_{x\in F} \lim_{n\to\infty} \frac{K(x_n)}{n/N} \tag{6}$$

と表すことが出来る。ただし、この $\max\limits_{x\in F}$ は、F の元 x のうち $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K(x_n)}{n/N}$ が存在するような x について最大値をとることを意味する。従って直観的に言うと、$\dim_A F$ とは、F の各点 x の二進表示での一桁あたりの複雑さ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K(x_n)}{n/N}$ の最大値である。特に $N=1$ の場合、$\lim\limits_{n\to\infty} K(x_n)/n$ は、単に、実数 x の二進表示の圧縮率であり、$\dim_A F$ はこの圧縮率の最大値に等しい。

しかし正確には、$\dim_A F$ はこれらの直観的な意味よりも強い意味を持つ。もし式(5) の代わりに

$$D \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{K(x_n)}{n/N}. \tag{7}$$

とするならば、$\dim_A F$ は F の各点 x の二進表示での一桁あたりの複雑さの最大値そのものの意味を持つ。しかし、任意の $x \in \mathbf{R}^N$ に対して(5)$\Rightarrow$(7) は成り立つが、逆は一般には成り立たないので、定義 3.1 の $\dim_A F$ は、一桁あたりの複雑さの最大値よりも強い意味

を持つ。

定義 3.2.（帰納的可算条件）F を $\mathbf{R}^N$ の任意の部分集合とする。

$$F \bmod 1 \equiv \left\{ (x^1 \bmod 1, \ldots, x^N \bmod 1) \;\middle|\; (x^1, \ldots, x^N) \in F \right\} \tag{8}$$

とおくと、$F \bmod 1$ は $[0,1)^N$ の部分集合であるが、全ての非負整数 n について、$[0,1)^N$ を一辺の長さが 2^{-n} の N 次元半開区間に分割することを考える。このとき、帰納的可算条件（r.e. condition）とは、これらの区間のうち $F \bmod 1$ と交わる区間の全てとそれに隣接する区間のいくつかが帰納的可算集合を成すという条件であり、F についての条件である。

これを形式的に表現すると次の通りである。

まず、X の元 s に対して、$I(s) \equiv [0.s, 0.s+2^{-|s|})$ 及び $\hat{I}(s) \equiv [0.s-2^{-|s|}, 0.s+2^{1-|s|}) \bmod 1$ とおく。$\hat{I}(s)$ は、$I(s)$ に " 隣接する " 二つの区間と $I(s)$ とを合わせた集合である。そして、$I(s)$ と $\hat{I}(s)$ のそれぞれを、$I(s_1, \ldots, s_N) \equiv I(s_1) \times \cdots \times I(s_N)$ と $\hat{I}(s_1, \ldots, s_N) \equiv \hat{I}(s_1) \times \cdots \times \hat{I}(s_N)$ によって、$\mathbf{R}^N$ に拡張する。

X^N の元 $(s_1, \ldots, s_N)$ と N 次元半開区間 $I(s_1, \ldots, s_N)$ とを同一視するとき、

$$\mathfrak{I}(F) \equiv \left\{ (s_1, \ldots, s_N) \;\middle|\; |s_1| = \cdots = |s_N| \;\&\; I(s_1, \ldots, s_N) \cap (F \bmod 1) \neq \phi \right\} \tag{9}$$

は、$F \bmod 1$ と交わる区間全てからなる集合であり、また、

$$\hat{\mathfrak{I}}(F) \equiv \left\{ (s_1, \ldots, s_N) \;\middle|\; |s_1| = \cdots = |s_N| \;\&\; \hat{I}(s_1, \ldots, s_N) \cap (F \bmod 1) \neq \phi \right\} \tag{10}$$

は、$F \bmod 1$ と交わる区間全てとそれらに隣接する区間全てからなる集合である。

さてこのとき、F が帰納的可算条件を満たすとは、ある帰納的可算集合 L が存在して、$\mathfrak{I}(F) \subset L \subset \hat{\mathfrak{I}}(F)$ が成り立つことを言う。□

定理 3.3. $\mathbf{R}^N$ の有界な部分集合 F が帰納的可算条件を満たすとき、

$$\forall x \in F \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad K(x_n) \leq \frac{\overline{\dim}_B F}{N} n + o(n) \tag{11}$$

が成り立つ。

証明：[11] の Theorem 2.9 の証明と類似である。□

実数 $D \geq 0$ に対し、$\mathbf{R}^N$ の部分集合 T_D を次式で定義する。

$$T_D \equiv \left\{ x \in \mathbf{R}^N \;\middle|\; \lim_{n \to \infty} K(x_n) - \frac{D}{N} n = \infty \text{ でない} \right\}. \tag{12}$$

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 3.4. 計算可能な実数 $D \geq 0$ に対して、$\mathcal{H}^D(T_D) = 0$ である。□

なお、D が計算可能な実数で、$0 \leq D \leq N$ のとき、T_D は Borel 集合であり、T_D の Hausdorff 次元は D に等しい。

定理 3.3 と定理 3.4 から、次の定理が得られる。

定理 3.5. $\mathbf{R}^N$ の部分集合 F が次の 5 つの条件を満たすものとする。

(i) F は有界.
(ii) F は帰納的可算条件を満たす.
(iii) $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$.
(iv) $\dim_H F$ は計算可能な実数.
(v) $\mathcal{H}^D(F) > 0$ (ここで $D \equiv \dim_H F$).

このとき、$\dim_A F$ が存在し、$\dim_A F = \dim_H F$ となる。□

D を $\mathbf{R}^N$ の閉部分集合とする。写像 $S\colon D \to D$ に対し、S が D 上の縮小写像であるとは、ある実数 c が存在し、$0 < c < 1$ かつ $\forall\, x, y \in D\ |S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ となることを言う。更に、上式で等号が成り立つ場合、即ち、ある実数 c が存在し、$0 < c < 1$ かつ $\forall\, x, y \in D\ |S(x) - S(y)| = c|x - y|$ となるとき、S を D 上の相似写像と言う。

定理 3.6.（不変集合）$S_1, \ldots, S_m$ を D 上の縮小写像とする。このとき、

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \tag{13}$$

を満たす空でないコンパクト集合 F が一意的に存在する。この F を $S_1, \ldots, S_m$ の不変集合と呼ぶ。

証明：[7] 参照 □

次の定理が成り立つ。

定理 3.7.（計算可能な自己アフィン集合）$S_1, \ldots, S_m$ を $\mathbf{R}^N$ 上の縮小写像とし、各 S_i は $\mathbf{R}^N$ 上のアフィン変換であるとする。即ち、各 S_i に対し、ある N 次正方行列 M_i と N 次元ベクトル v_i があって、$S_i(x) = M_i x + v_i\ (x \in \mathbf{R}^N)$ と表せるものとする。更に、各 M_i に対して、M_i のどの行列要素も計算可能な実数であり、かつ、各 v_i に対して、v_i のどのベクトル成分も計算可能な実数であるとする。このとき、$S_1, \ldots, S_m$ の不変集合は帰納的可算条件を満たす。□

次に、相似写像について考える。相似写像 $S_1, \ldots, S_m$ の不変集合を自己相似集合と呼ぶ。

定義 3.8.（開集合条件）$S_1, \ldots, S_m$ を $\mathbf{R}^N$ 上の相似写像とする。$S_1, \ldots, S_m$ が開集合条件（open set condition）を満たすとは、ある空でない有界な開集合 V が存在し、

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \tag{14}$$

かつ $S_i(V) \cap S_j(V) = \phi\ (i \neq j)$ が成り立つことを言う。□

定理 3.9.（自己相似集合）$S_1, \ldots, S_m$ を $\mathbf{R}^N$ 上の相似写像とする。即ち、各 S_i について、

$0 < c_i < 1$ なる実数 c_i があり、$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|$ $(x, y \in \mathbf{R}^N)$ が成り立つものとする。そして、$S_1, \ldots, S_m$ が開集合条件を満たすものとする。このとき、$S_1, \ldots, S_m$ の不変集合 F に対し、$\dim_H F = \dim_B F = D$ が成り立つ。ここで、D は $c_1^D + \cdots + c_m^D = 1$ を満たす実数である。更に、この D について、$0 < \mathcal{H}^D(F) < \infty$ が成り立つ。

証明：[7] 参照 □

定理 3.5、定理 3.7、定理 3.9 より、次の定理が成り立つ。

定理 3.10.（計算可能な自己相似集合）$S_1, \ldots, S_m$ を $\mathbf{R}^N$ 上の相似写像とする。即ち、各 S_i について、$0 < c_i < 1$ なる実数 c_i があり、$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|$ $(x, y \in \mathbf{R}^N)$ が成り立つものとする。このとき、各 S_i は必然的にアフィン変換であって、ある N 次正方行列 M_i と、ある N 次元ベクトル v_i があり、$S_i(x) = M_i x + v_i$ と表すことができるが、これら、全ての M_i の全ての行列要素と、全ての v_i の全てベクトル成分が、どれも計算可能な実数であるとする。更に $S_1, \ldots, S_m$ は開集合条件を満たすものとする。このとき、$S_1, \ldots, S_m$ の不変集合 F に対し、アルゴリズム次元 $\dim_A F$ が存在し、それは $\dim_H F$ に等しく、更に $c_1^D + \cdots + c_m^D = 1$ を満たす実数 D に等しい。即ち、$\dim_A F = \dim_H F = D$ である。□

定理 3.10 から、Cantor 集合、Sierpiński gasket、Koch 曲線など、お馴染みの自己相似集合に対して、アルゴリズム次元と Hausdorff 次元とが等しいことがわかる。

例 3.11.（**Sierpiński gasket**）Sierpiński gasket は、次のように定義される $\mathbf{R}^2$ 上の相似写像 S_1, S_2, S_3 の不変集合 F である。

$$\begin{aligned} &S_1\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad S_2\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &S_3\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

上の S_1, S_2, S_3 の定義式に現れる行列要素やベクトル成分の定数は、どれも計算可能な実数なので、定理 3.10 から、$(1/2)^D + (1/2)^D + (1/2)^D = 1$ を解くことにより、$\dim_A F = \dim_H F = D = \log_2 3$ が得られる。□

系 3.12. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ を、prefix-free な、X の有限部分集合とし、F を P の元を無限個並べて作った片側無限列全体からなる集合とする。この F について次式が成り立つ。

$$\forall\, \alpha \in F \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad K(\alpha_n) \leq Dn + o(n), \tag{16}$$

$$\exists\, \alpha \in F \quad \lim_{n\to\infty} K(\alpha_n) - Dn = \infty. \tag{17}$$

ここで、D は、$2^{-D|p_1|} + \cdots + 2^{-D|p_m|} = 1$ を満たす実数である。よって、F に属する無限列の圧縮率の最大値は D である。□

例 3.13. $P = \{0, 11\}$ の場合、0 と 11 とを無限個並べて得られる片側無限列の圧縮率の最大値は、$2^{-D} + 4^{-D} = 1$ を解くことにより、$D = 1 - \log_2(\sqrt{5} - 1)$ で与えられる。□

4 Chaitin の停止確率 Ω の一般化

Chaitin の停止確率 Ω を次のように一般化する。

定義 4.1. Chaitin の Ω の " D 次元版 " である Ω^D を

$$\Omega^D \equiv \sum_{p\in \mathrm{dom}\, U} 2^{-\frac{|p|}{D}} \qquad (D>0) \tag{18}$$

で定義する。□

ゆえに、Ω^1 が Chaitin の Ω である。次の定理が成り立つ。

定理 4.2. D が計算可能な実数で、$0<D\le 1$ のとき、Ω^D は収束し、$0<\Omega^D\le\Omega<1$ であり、次式を満たす。

$$\forall\, n\in \mathbf{N} \quad K(\Omega^D_n)\le Dn+o(n), \tag{19}$$

$$\exists\, c\in \mathbf{N} \quad \forall\, n\in \mathbf{N} \quad Dn-c\le K(\Omega^D_n). \tag{20}$$

従ってこのとき、$\lim_{n\to\infty} K(\Omega^D_n)/n = D$ となる。また、$1<D$ のときには、Ω^D は ∞ に発散する。□

Ω の最初の $n$bit は、$n$bit 以下のプログラムの停止問題を解くのに対し、Ω^D の最初の $n$bit は、Dnbit 以下のプログラムの停止問題を解く。

なお、$D\mapsto\Omega^D$ で定義される関数は $(0,1)$ で C^∞ 級であり、任意の自然数 k について、$d^k\Omega^D/dD^k$ は Ω^D と同じ性質を持つ。

5 自己相似停止集合

$[0,1]$ のコンパクトな部分集合 F_{halt} を次式で定義する。

$$F_{\mathrm{halt}} \equiv \left\{ 0.p_1p_2p_3\ldots\ldots \;\middle|\; \text{各 } p_i \text{ は } \mathrm{dom}\, U \text{ の元} \right\} \tag{21}$$

$[0,1]$ 上の相似写像族 $S_p(x)=2^{-|p|}x+0.p$ $(p\in\mathrm{dom}\,U)$ を考えると、F_{halt} は

$$F_{\mathrm{halt}} = \bigcup_{p\in\mathrm{dom}\,U} S_p(F_{\mathrm{halt}}) \tag{22}$$

を満たす。$\mathrm{dom}\,U$ は可算無限集合なので、F_{halt} は可算無限個の部分と自己相似な集合であり、$\mathrm{dom}\,U$ は prefix-free なので、" 広義の " 開集合条件が満たされている。

また、$\left\{ s\in X \;\middle|\; I(s)\cap F_{\mathrm{halt}}\ne\phi \right\}$ は、帰納的でない帰納的可算集合である。従って、X の元 s が与えられたとき $I(s)\cap F_{\mathrm{halt}}$ が空か否か? という問題は決定不能であり、コンピュータ上で F_{halt} を任意精度で描くことは不可能である。

Ω^D の性質を用いることにより、F_{halt} について次の定理が証明できる。

定理 5.1. (自己相似停止集合) F_{halt} の Lebesgue 測度は 0 で、$\dim_H F_{\mathrm{halt}}$ は 1 である。□

F_{halt} に属する実数はどれも、Martin-Löf の意味でランダムではない。従って、$\dim_A F_{\mathrm{halt}}$ は存在しない。我々はアルゴリズム次元を強めに定義したので、このようなことが起こるのである。もっと弱く、F_{halt} に属する実数 x で圧縮率が 1 のものは存在する。即ち、$\lim_{n\to\infty} K(x_n)/n = 1$ となるものは存在する。従って、F_{halt} に属する実数の圧縮率の最大値は 1 である。

参考文献

[1] M.F. Barnsley (1993), Fractals Everywhere, 2nd ed., Academic Press Professional.

[2] J.-Y. Cai and J. Hartmanis (1994), On Hausdorff and topological dimensions of the Kolmogorov complexity of the real line, J. Comput. System Sci., 49, no. 3, pp. 605–619.

[3] G.J. Chaitin (1975), A theory of program size formally identical to information theory, Journal of the ACM, 22, pp. 329–340.

[4] G.J. Chaitin (1987), Incompleteness theorems for random reals, Advances in Applied Mathematics, 8, pp. 119–146.

[5] G.J. Chaitin (1987), Algorithmic Information Theory, Cambridge University Press.

[6] K.J. Falconer (1985), The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press.

[7] K.J. Falconer (1990), Fractal Geometry—Mathematical foundations and Applicatons, John Wiley.

[8] K.J. Falconer (1997), Techniques in Fractal Geometry, John Wiley.

[9] M. Li and P.M.B. Vitányi (1990), Kolmogorov complexity and its applicaiotns, in Handbook of Theoretical Computer Science, J. van Leeuwen, ed., Elsevier and MIT Press, pp. 187–254.

[10] P. Martin-Löf (1966), The Definition of Random Sequences, Inform. Contr., 9, pp. 602–619.

[11] L. Staiger (1993), Kolmogorov Complexity and Hausdorff Dimension, Inform. Comput., 103, pp. 159–194.

[12] A.M. Turing (1936), On computable numbers with an application to Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. (2), 42, pp. 230–265; Correction, Ibid, 43 (1937), pp. 544–546.